www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SECONDE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

Le but du problème est de prouver, dans certains cas particuliers, la conjecture explicitée ci-après, souvent nommée conjecture d'Ilieff-Sendov.

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, et on note $|z|$ la valeur absolue, ou module, du nombre complexe z ; on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle. On munit $\mathbb{C}$ de la structure d'espace vectoriel réel *euclidien* de dimension 2 donnée par la norme $z \mapsto |z|$. On *admettra* le théorème de d'Alembert-Gauss, qui dit que tout polynôme non constant en une variable à coefficients dans $\mathbb{C}$ a une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, de degré au moins égal à 2. Soit z une racine de S. On dit que S *et* z *vérifient* (IS) s'il existe une racine ζ du polynôme dérivé S' de S vérifiant $|z - \zeta| \leqslant 1$. On dit que S vérifie (IS) si, pour toute racine z de S, S et z vérifient (IS).

La conjecture d'Ilieff-Sendov est que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré au moins égal à 2, et *dont les racines sont de module au plus 1*, vérifie (IS).

Dans *toute* la suite, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et un polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$, de degré n. On note $z_0, z_1, \ldots, z_m$ les racines distinctes de P (ainsi m est un entier $\geqslant 0$) ; pour $i = 0, \ldots, m$, on note n_i la multiplicité de z_i. On a donc :

$$P = a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{n_i} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{m} n_i = n.$$

On *suppose* que les z_i vérifient $|z_i| \leqslant 1$.

Enfin on rappelle qu'un polynôme est dit unitaire s'il est non nul et si son terme de plus haut degré a pour coefficient 1.

I. QUELQUES CAS SIMPLES DE LA CONJECTURE

A. 1. Prouver que si $n = 2$, alors P vérifie (IS).

2. Montrer que si $n_0 \geqslant 2$, alors P et z_0 vérifient (IS).

3. Montrer qu'il existe des nombres complexes $w_1, \ldots, w_m$ non racines de P tels que :

$$P' = n a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j=1}^{m} (X - w_j).$$

On conserve dans la suite du I.A. les notations de cette formule.

4. On suppose $n_0 = 1$. Calculer $\prod_{j=1}^{m} (z_0 - w_j)$ en fonction de n et des z_i.

5. Prouver que si on a $n \geqslant 2^m$, alors P vérifie (IS).

6. Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples.

7. Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$. En considérant $(P'/P)(w_j)$, montrer que w_j est un barycentre à coefficients strictement positifs des z_i, et qu'on a $|w_j| \leqslant 1$. En déduire que si $z_0 = 0$, alors P et z_0 vérifient (IS).

B Changeons légèrement de notation en posant : $P' = n a_n \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i)$, où les t_i sont des nombres complexes.

Dans cette partie I.B., on suppose $n_0 = 1$.

1. Prouver que si on a $|(P''/P')(z_0)| \geqslant n - 1$, alors P et z_0 vérifient (IS).

2. Calculer $(P''/P')(z_0)$ en termes des z_i [utiliser le polynôme $P/(X - z_0)$.]

3. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$, alors on a :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Tournez la page S.V.P.

4. On suppose $z_0 = 1$, et on range les t_i de sorte que :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_i}\right) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1 .$$

Prouver qu'on a :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant 1 \qquad \text{puis} \qquad \left|t_1 - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|t_1 - 1\right| \leqslant 1 .$$

5. On suppose z_0 de module 1. Prouver que P et z_0 vérifient (IS). [Utiliser une transformation géométrique simple de $\mathbb{C}$].

II. Cas d'une racine réelle

Dans toute cette partie, on suppose que $n_0 = 1$ et que z_0 est un nombre réel a vérifiant $0 < a < 1$.

Pour $w \in \mathbb{C} - \{1/a\}$, on pose $T(w) = \dfrac{w-a}{aw-1}$.

On note $\tilde{P}$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel qu'on ait :

$$\tilde{P}(X) = (aX-1)^n P\left(\frac{X-a}{aX-1}\right),$$

et on l'écrit $\tilde{P}(X) = b_n X^n + \cdots + b_0$, $b_i \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $T \circ T(w)$ pour $w \in \mathbb{C} - \{1/a\}$, et trouver l'image par T du cercle unité, de son intérieur, et de son extérieur privé du point $1/a$.

2. Prouver qu'on a $b_0 = 0$, $|b_1| \leqslant |b_n|$, et $|b_{n-1}| \leqslant (n-1)|b_n|$.

On pose : $$R(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[(n-i)\, b_i X^i + \frac{i b_i}{a} X^{i-1}\right]$$

et on écrit $R(X) = A \prod_{k=1}^{n-1} (X - \gamma_k)$ où A est non nul et où les γ_k sont rangés de sorte qu'on ait :

$$|\gamma_1| \leqslant |\gamma_2| \leqslant \cdots \leqslant |\gamma_{n-1}| .$$

3. Prouver qu'on a : $$\prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n - a(n-1)} .$$

4. Soit $w \in \mathbb{C} - \{1/a\}$. Calculer $P'(T(w))$ en fonction de a, w et $R(w)$.

5. Soit μ un nombre réel tel que $|\gamma_1| \leqslant \mu < \dfrac{1}{a}$. Prouver que P' a une racine ζ vérifiant :

$$|\zeta - a| \leqslant \frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu} .$$

Si μ vérifie $\mu \leqslant \dfrac{1}{1+a-a^2}$, prouver que P' a une racine ζ vérifiant $|\zeta - a| \leqslant 1$.

6. Montrer que si on a $n \leqslant 4$, alors P et a vérifient (IS), et en déduire que si $n \leqslant 4$, alors pour toute racine z de P de module compris strictement entre 0 et 1, P et z vérifient (IS).

7. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 3 ou 4, ayant toutes ses racines de module au plus 1 vérifie (IS).

8. On suppose qu'on a $n = 5$, 6 ou 7 et que P a un zéro au moins double de module 1. Montrer que P et a vérifient (IS). [On pourra étudier la fonction $(n-2)\ln(1+a-a^2) - \ln(n-(n-1)a)$.]

9. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 5, 6 ou 7, ayant un zéro au moins double de module 1, et toutes ses racines de module au plus 1, vérifie (IS).

III. Continuité des racines d'un polynôme

On note $\mathbb{C}[X]_n$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus n. Pour

$$S = \sum_{i=0}^{n} s_i X^i \in \mathbb{C}[X]_n, \text{ on pose } |S| = \sum_{i=0}^{n} |s_i| .$$

C'est une norme sur $\mathbb{C}[X]_n$.

1. Prouver que si $S \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n, toute racine z de S dans $\mathbb{C}$ vérifie : $|z| \leqslant \dfrac{|S|}{|s_n|}$.

2. Soit S_k une suite de polynômes de degré n qui converge vers S, de degré n, dans $\mathbb{C}[X]_n$, quand k tend vers l'infini. On pose $S_k = \alpha_k \prod_{i=1}^{n} (X - x_{i,k})$. Soient z une racine de S dans $\mathbb{C}$ et p sa multiplicité. Soit ε un nombre réel, $\varepsilon > 0$; montrer que pour k assez grand, p au moins des nombres complexes $x_{i,k}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont à distance au plus ε de z.

IV. Polynômes extrémaux

Soit k un entier vérifiant $n \geqslant k + 1 \geqslant 2$. On note $P_n(k)$ la partie de $\mathbb{C}[X]_n$ formée des polynômes *unitaires* de degré n ayant au plus $k+1$ racines distinctes, toutes de module au plus 1.

Pour $S \in P_n(k)$ et pour z une racine de S, on note $I_S(z)$ la plus courte distance de z aux racines de S'. On note I(S) le plus grand des $I_S(z)$ quand z parcourt l'ensemble des racines de S.

A. 1. Montrer qu'on a $I(S) \leqslant 2$ pour $S \in P_n(k)$, et qu'il existe un polynôme S de $P_n(n-1)$ tel que $I(S) = 1$.
On note $I(P_n(k))$ la borne supérieure des I(S) quand S parcourt $P_n(k)$.

2. Prouver que si on a $I(P_n(k)) \leqslant 1$, alors tout polynôme de $P_n(k)$ vérifie (IS).

3. Prouver que $P_n(k)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}[X]_n$.

4. Prouver que $I : S \mapsto I(S)$ est une application continue de $P_n(k)$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(P_n(k))$.

B. On appelle *polynôme extrémal* de $P_n(k)$ un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(P_n(k))$.

1. Prouver qu'un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a une racine de module 1. [Utiliser une transformation géométrique simple de $\mathbb{C}$.]

2. Prouver que pour tout nombre réel θ, un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a au moins une racine de la forme $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in [\theta, \theta + \pi[$.

3. On suppose $n = 5, 6$ ou 7 et $k = 3$. On note S un polynôme extrémal de $P_n(k)$. On suppose que S a une racine a réelle vérifiant $0 < a < 1$. Prouver que S et a vérifient (IS). [Dans le cas où S a exactement 2 zéros distincts u et v de module 1, on pourra prouver que leur somme est nulle, et établir la formule $|a - \zeta|^k \leqslant 2^{k-2} |a - u| \cdot |a - v| / n$, où ζ est la racine de S' la plus proche de a].

4. On suppose $n = 5, 6$ ou 7. Prouver qu'on a $I(P_n(3)) \leqslant 1$.

5. Prouver que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ayant au plus 4 racines distinctes, ces racines étant toutes de module au plus 1, vérifie (IS).

Remarque. — On ne semble pas savoir démontrer la conjecture dans le cas général. Outre ceux envisagés dans le problème, d'autres cas particuliers ont été établis, notamment celui des polynômes de degré 5, ou celui des polynômes ayant au plus 4 coefficients non nuls.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail